88) 19/12

Παρατήρηση

Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι συνεκτικά στον $\mathbb{R}^2$

Ορισμός

(E,ρ) μ.χ. x,y εν E, $\alpha<\beta$, α,β εν $\mathbb{R}$

$f:[\alpha,\beta]\to E$ με $f(\alpha)=x$, $f(\beta)=y$ τότε η f είναι μια οδός εν E συνδέουσα τα x,y

συν. $\mathcal{R}(f)\subseteq E$, $\mathcal{R}(f)$ συνεκτικό σύνολο

E οδικά συνεκτικός μ.χ. $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Για τυχόντα } x,y \text{ εν } E \text{ υπάρχει} \\ \text{οδός συνδέουσα τα } x,y\end{array}\right\}$

Πρόταση

Αν E είναι οδικά συνεκτικός τότε είναι κ συνεκτικός $(\not\Leftarrow)$

Ορισμός

(E,N) σταθμητός δ.χ., $\rho(x,y)=N(x-y)$, x_1,x_2 εν E

$\overline{x_1\ x_2}=\{x\in E: x=(1-t)x_1+tx_2,\ t\in[0,1]\}\subseteq E$

$\overline{x_1\ x_2}$ ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα x_1,x_2 στο E

Ορισμός

S κυρτός σταθμ. δ.χ. $\Leftrightarrow (\forall x_1,x_2$ εν $E): \overline{x_1\ x_2}\subseteq S$

Εφαρμογή

Σ' ένα σταθμητό δ.χ. ν.δ.ο. τυχούσα σφαιρική περιοχή είναι κυρτό σύνολο

Απόδειξη

Έστω (E,N) σταθ. δ.χ. κ $B(\alpha,r)$ τυχούσα σφαιρ. περιοχή με $r>0$

$B(\alpha,r)=\{x\in E:\rho(x,\alpha)<r\}=\{x\in E: N(x-\alpha)<r$

x,y τυχόντα στοιχεία της $B(\alpha,r)$: $N(x-\alpha)<r$ κ $N(y-\alpha)<r$

Θ.δ.ο. $\overline{x\ y}\subseteq B(\alpha,r)$

Έστω z τυχόν, $z\in\overline{x\ y}$. Τότε $z=(1-t)x+ty$, $t\in[0,1]$

$N(z-\alpha)=N[(1-t)x+ty-\alpha]=N[(1-t)x+ty-(1-t)\alpha-t\alpha] \Leftrightarrow$

$N(z-\alpha)\leq N[(1-t)(x-\alpha)]+N[t(y-\alpha)]=(1-t)N(x-\alpha)+tN(y-\alpha) \Leftrightarrow$

$N(z-\alpha)<(1-t)r+tr=r$ άρα $z\in B(\alpha,r)$